

13. Soustavy lineárních rovnic a více neznámých

- 3 NEZNÁMÉ

- soustavu lib. počtu lineárn. rovnic přivedeme na maticový typ (1), (2), (3)

(1) 3 RCE PRO 3 NEZNÁMÉ

$$\begin{array}{rcl} 3x - y + 2z & = & 13 \\ 2y + z & = & 1 \\ 2z & = & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2z = 6 & 2y + 3 = 1 & 3x + 1 + 6 = 13 \\ z = 3 & 2y = -2 & 3x = 6 \\ & y = -1 & x = 2 \end{array}$$

$$K = \{ [2, -1, 3] \}$$

1 ŘEŠENÍ

(2) 2 RCE PRO 3 NEZNÁMÉ

$$\begin{array}{rcl} x + 3y - z & = & 2 \\ y + 3z & = & -2 \end{array}$$

(2 RCE 3 NEZN. $\Rightarrow$ JEDNU VOLÍM)

kv. $z \in \mathbb{R} \Rightarrow y = -2 - 3z$

a dopoč:

$$\begin{aligned} x &= 2 - 3y + z \\ x &= 2 - 3(-2 - 3z) + z \\ x &= 2 + 6 + 9z + z \\ x &= 8 + 10z \end{aligned}$$

$$K = \{ [8 + 10z, -2 - 3z, z], z \in \mathbb{R} \}$$

NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ

(3) 1 RCE PRO 3 NEZNÁMÉ

a) $2x - y + 3z = 1$
 $(\Rightarrow$ VOLÍME 2 NEZNÁMÉ)
 a dopoč.

kv. $x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2x &= 1 - 3z + y \\ x &= \frac{1}{2}(1 - 3z + y) \\ x &= \frac{1 - 3z + y}{2} \end{aligned}$$

$$K = \{ [\frac{1 + y - 3z}{2}, y, z], y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \}$$

NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ

b) volíme $x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y = 2x + 3z - 1$$

$$K = \{ [x, 2x + 3z - 1, z], x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \}$$

b) KDYBY

$$0x + y + 3z = 1$$

$\Rightarrow$ VŽDY volíme $x \in \mathbb{R}$ (máme koeficientem 0) a dopoč

- kdyby $x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \Rightarrow y = 1 - 3z$

$$K = \{ [x, 1 - 3z, z], x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \}$$

POKUD ZÍSKÁME

a) $0x + 0y + 0z = d \quad (d \neq 0)$
 $(0x + 0y + 0z = 4)$
 $\Rightarrow$ SOUSTAVA NEMÁ ŘEŠENÍ
 $K = \emptyset$

b) $0x + 0y + 0z = 0$
 $\Rightarrow$ RCI LZE VYNECHAT
 (aniž by se počítalo s rovnicí)

- METODY ŘEŠENÍ: DOSAZOVACÍ, SČÍTACÍ, GAUSSOVA ELIMINAČNÍ (VYLUČOVACÍ)

- GAUSSOVA ELIMIN. METODA: postupně přivedeme soustavu na tvar TROJÚHELNÍKOVÝ TVAR (ne 2. rovnici, vyloučíme první neznámou, ne 3. rovnici první a druhou neznámou)

- KUSKOVANÝ KÁPIŠ: pomocí kv. rozšíření matice soustavy (v řádcích koeficientů a maticových, na pravo částí a posled. sloupce absolutní členy rovnic přivedené na pravou stranu rovnic)

- PORADÍ ROVNIC LZE VHDNĚ ZAHĚNOVAT

② Řešit v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

POZOR NA TYTO PŘÍPADY !

a) $5x - 2y = 3$ i. (2) $\mathbb{Q} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{array}{r} 10x - 4y = 6 \\ -10x + 4y = -6 \\ \hline 0x + 0y = 0 \\ (0=0 \text{ p.}) \end{array}$$

sčítací
(1.xp.)

NEKON. MNOHO ŘEŠ., ale jakýchkoli
- 1 rce je násobkem druhé
=> JEDNU RCI LZE VYNECHAT
=> 1 RCE SE 2 NEZNÁMÝMI
(řešení v $\mathbb{R}$ č. 11)

$$\begin{array}{r} 5x - 2y = 3 \\ -2y = 5x - 3 \\ 2y = 3 - 5x \\ y = \frac{5x-3}{2} \end{array}$$

$$\mathcal{K} = \left\{ [x, y]; x \in \mathbb{R} \wedge y = \frac{5x-3}{2} \right\}$$

[mnoho lke mýj. x a pak y ∈ R]

3. xp. - VIDÍM, ŽE 1 rce je násobkem druhé => LZE JEDNU RCI VYNECHAT

$$\begin{array}{r} 5x - 2y = 3 \quad \text{i. (2)} \\ 10x - 4y = 6 \\ 10x - 4y = 6 \\ 10x - 4y = 6 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{jedna rce násobkem} \\ \text{druhé} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x - 2y = 3 \\ -2y = 3 - 5x \\ 2y = 5x - 3 \\ y = \frac{5x-3}{2} \end{array}$$

$$\mathcal{K} = \left\{ [x, y]; x \in \mathbb{R} \wedge y = \frac{5x-3}{2} \right\}$$

$$\begin{array}{r} 5x - 2y = 3 \Rightarrow 2y = 5x - 3 \\ 10x - 4y = 6 \leftarrow y = \frac{5x-3}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10x - 2 \cdot \frac{5x-3}{2} = 6 \\ 10x - 2(5x-3) = 6 \\ 10x - 10x + 6 = 6 \\ 0x = 0 \\ (0=0 \text{ p.}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{DOSAZ.} \\ (2.xp.) \\ \downarrow \end{array}$$

$$x \in \mathbb{Q} = \mathbb{R} \text{ lib a } y = \frac{5x-3}{2}$$

$$\mathcal{K} = \left\{ [x, y]; x \in \mathbb{R} \wedge y = \frac{5x-3}{2} \right\}$$

$$\left[\mathcal{K} = \left\{ \left[x, \frac{5x-3}{2} \right]; x \in \mathbb{R} \right\} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} - \text{KDYBY VÝŠLO (při mýj. x)} \\ 0y = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R} \wedge x = \frac{3+2y}{5} \\ \mathcal{K} = \left\{ [x, y]; y \in \mathbb{R} \wedge x = \frac{3+2y}{5} \right\} \end{array} \right]$$

- U DOSAZ. METODY LZE UŽÍT
DOSAZENÍ NÁSOBKU NEZNÁME

$$\begin{array}{r} 5x - 2y = 3 \Rightarrow 2y = 5x - 3 \\ 10x - 4y = 6 \leftarrow \text{do 2. rce položíme } 4y = 2(5x-3) \\ 10x - 2(5x-3) = 6 \\ \text{mno} \\ 10x - (10x-6) = 6 \quad 4y = 10x-6 \\ \text{poroc na závorky} \end{array}$$

b) $5x - 2y = 3$ i. (2) $\mathbb{Q} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\begin{array}{r} 10x - 4y = 5 \\ -10x + 4y = -6 \\ \hline 10x - 4y = 5 \\ 0x + 0y = -1 \\ (0 \neq -1) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \oplus$$

sčítací

$$\mathcal{K} = \emptyset$$

$$5x - 2y = 3 \Rightarrow 2y = 5x - 3$$

$$10x - 4y = 5 \leftarrow 4y = 10x - 6$$

$$10x - (10x - 6) = 5 \quad \text{DOSAZ.}$$

$$\begin{array}{r} 0x + 6 = 5 \\ 0x = -1 \\ (0 \neq -1) \end{array}$$

$$\mathcal{K} = \emptyset$$

$$5x - 2y = 3 \quad \text{i. 2}$$

$$10x - 4y = 5$$

$$\begin{array}{r} 10x - 4y = 6 \\ 10x - 4y = 5 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

na L stranách
stejná výrazky,
na P různé

=> SPOR - NELZE

$$\mathcal{K} = \emptyset$$

KOMPARAČNÍ
(POROVNÁVACÍ)

② Řeš v $\mathbb{R}$

$$x + y - 2x = -2$$

$$2x + 2y + 3x = 3$$

$$5x + 5y + 4x = 4$$

$$(-5) \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -5 & -5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2) \cdot ① + ②}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1:7 \\ 1:6}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{mupř} \\ - \text{ke vynechat}}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 RCE PRO 3 NEZNAMÉ

$$x = 1 \quad \text{volim } y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x = -2 + 2x - y$$

$$x = -2 + 2 - y$$

$$x = -y$$

$$\mathcal{K} = \{[-y, y, 1], y \in \mathbb{R}\}$$

③ Řeš v $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$x + y - 2x = -2 \Rightarrow x = 2x - y - 2$$

$$2x + 2y + 3x = 3$$

$$5x + 5y + 4x = 1$$

$$2(2x - y - 2) + 2y + 3x = 3$$

$$5(2x - y - 2) + 5y + 4x = 1$$

$$4x - 2y - 4 + 2y + 3x = 3$$

$$10x - 5y - 10 + 5y + 4x = 1$$

$$4x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{4}$$

$$14x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{14}$$

} SPOR

$$\mathcal{K} = \emptyset$$

! POZOR !

NEŽE JEDNU ROVNICI
VYNECHAT - NEJSOU STEJNÉ

$$x + y - 2x = -2 \Rightarrow x = -2 + 2x - y \quad (*)$$

$$2x + 2y + 3x = 3$$

$$5x + 5y + 4x = 4$$

$$2(-2 + 2x - y) + 2y + 3x = 3$$

$$5(-2 + 2x - y) + 5y + 4x = 4$$

$$-4 + 4x - 2y + 2y + 3x = 3$$

$$-10 + 10x - 5y + 5y + 4x = 4$$

$$0y + 4x = 7 \quad 1:7$$

$$0y + 14x = 14 \quad 1:14$$

$$0y + x = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$0y + x = 1$$

JEDNU
LZE
VYNECHAT

$$\text{dos. do } (*) \quad x = -2 + 2 \cdot 1 - y = -y$$

VOLIM

$$y \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{K} = \{[-y, y, 1]\}$$

$$(-5) \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -5 & -5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2) \cdot ①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 14 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{1:7}$$

$$\text{NEBO} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$14x = 11$$

$$x = \frac{11}{14}$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

} SPOR

$$0x + 0y + 0x = -3 \quad 10 = -3 \quad \text{nepl.}$$

$$\mathcal{K} = \emptyset$$

4) Řešení v $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

a) $\frac{x+1}{y+1} = 2 \quad 1. (y+1) \quad [y \neq -1, x \neq -1]$

4.30
20

$\frac{y+2}{x+1} = 4 \quad 1. (x+1)$

ODSTRANĚME ZLOMKY
URČÍME PODMÍNKY

$\frac{x+3}{x+1} = \frac{1}{2} \quad 1. 2(x+1)$

b) $\frac{3x+14}{x+1} = 2$

$\frac{3y+11}{y+1} = 2$

$\frac{3x+x}{y+1} = 2 \quad [K = \{[4, 1, 5]\}]$

$x+1 = 2(y+1)$

$y+2 = 4(x+1)$

$2(x+3) = 1(x+1)$

$x+1 = 2y+2$

$y+2 = 4x+4$

$2x+6 = x+1$

ČLENY S NEZNÁMÝMI NA JEDNU STRANU

ABSOLUTNÍ ČLENY (ČÍSLA) NA DRUHOU STRANU

$x - 2y = 1 \quad (2. \text{ up.})$
 $y - 4x = 2 \quad \text{GAUSSOVA ELIMIN.}$

$-x + 2x = -5$

$x - 2y = 1$

$y - 4x = 2$

$-2y + 2x = -4 \quad (1) + (2)$

$x - 2y = 1$

$y - 4x = 2$

$-y + x = -2$

$x - 2y = 1$

$y - 4x = 2$

$-3x = 0 \quad (2) + (3)$

$-3x = 0 \quad x = 0$
 $y = 2 + 4x \quad y = 2$
 $x = 1 + 2y \quad x = 5$
 $K = \{[5, 2, 0]\}$

2. up. DOSAZOVACÍ
 $x - 2y = 1 \Rightarrow x = 1 + 2y \quad (*)$
 $y - 4x = 2$
 $-x + 2x = -5$

$y - 4x = 2$

$-(1 + 2y) + 2x = -5$

$y - 4x = 2$

$-1 - 2y + 2x = -5$

$y - 4x = 2$

$-2y + 2x = -4 \quad 1:2$

$y - 4x = 2$

$-y + x = -2 \quad \{ \oplus \}$

$-3x = 0$

$x = 0$

$x = 1 + 2.2 \quad x = 5$
 $y = 2 - 4x \quad y = 2$

$K = \{[5, 2, 0]\}$

3. up. ZKRÁCENÝ ZÁPIS

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{1:2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right)$

$x - 2y = 1$
 $x - 4 = 1$
 $x = 5$

$y - 4x = 2$
 $y = 2$

$-3x = 0$
 $x = 0$

⑤ Řešit v $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

4.29 a) $4x + y + 2z = 2$

dosaz. $2y - z = 1 \Rightarrow 2y = 1 + z$
 $z = 4$
 $y = \frac{1}{2}(1 + z)$
 $x = \frac{1}{4}(2 - y - 2z)$
 $x = -4$
 $\mathcal{K} = \{[-4, 4, 4]\}$

b) $\begin{matrix} \text{gaus.} \\ \text{elim.} \end{matrix} \begin{matrix} x + y + z = 1 & \cdot (-1) \\ -2x - 2y - 2z = -2 & \cdot (-2) \\ x + 2y + 2z = 2 \end{matrix}$

$2x + 2y + z = 3$

$x + y + z = 1$

$y + z = 1 \quad -1 \textcircled{1} + \textcircled{2}$

$-z = 1 \quad -2 \textcircled{1} + \textcircled{3} \Rightarrow z = -1$

$\Rightarrow y = 1 - z$

$y = 1 - (-1)$

$y = 2$

$\Rightarrow x = 1 - y - z$

$x = 1 - 2 - (-1)$

$x = 1 - 2 + 1$

$x = 0$

$\mathcal{K} = \{[0, 2, -1]\}$

c) $x - y + z = 2 \quad \begin{matrix} \cdot (-1) \\ \cdot (-6) \end{matrix}$

$x + 2y - 2z = 3$

$6x - 3y + 3z = 14$

$x - y + z = 2$

$3y - 3z = 1$

$3y - 3z = 2$

$\left. \begin{matrix} 3y - 3z = 1 \\ 3y - 3z = 2 \end{matrix} \right\} \text{mluv} \\ \text{STOR} \quad \mathcal{K} = \emptyset$

d) $\begin{matrix} x - y + 2z = 2 \\ x + 2y - 2z = 3 \\ 6x - 3y + 8z = 13 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 8 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} (-1) \\ (-6) \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} (-1) \\ (-1) \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{array} \right)$

ARCE PRO 3 NEZN.
- 1 MERN. ROZM.

$\mathcal{K} \in \mathbb{R}$

$\mathcal{K} = \left\{ \left[\frac{2}{3} - \frac{4}{3}k, \frac{1}{3} + \frac{4}{3}k, k \right], k \in \mathbb{R} \right\}$

$x = 2 + y - 2z$

$x = 2 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3}k - 2k$

$x = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}k$

$3y = 1 + 4k$

$y = \frac{1}{3}(1 + 4k)$

ŘEŠTE NA ZVLÁŠTNÍ LIST, KLEPTE SI

e) $2x + 3y = 2$

$3x + 2z = 1$

$3y + 4z = 2$

$\mathcal{K} = \left\{ \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \right] \right\}$

f) $5x + 5y + z = 2$

$3x + 4y - 3z = 1$

$-2x - y - 4z = 0$

$\mathcal{K} = \emptyset$

g) x h) $-2x + y + 4z = -2$

$x - 2y - 2z = 0$

$x + y - 2z = 2$

$\mathcal{K} = \left\{ \left[\frac{4}{3} - 2k, \frac{4}{3}, k \right], k \in \mathbb{R} \right\}$

⑥ Řešit v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

4.31 a) $3x + y - 2z = 2$

$-2x + 3y + z = 1$

$3x - 2y + z = 2$

$\mathcal{K} = \{[1, 1, 1]\}$

b) $x + 2y + z = 4$

$3x - 5y + 3z = 1$

$2x + 7y - z = 8$

$\mathcal{K} = \{[1, 1, 1]\}$

⑦ Řešit v $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Gauss. elimin. metodou (alternativně matricově)

4.31 a) $x + y + z + u = 10$

$x + y - z - u = -4$

$x - y - z + u = 0$

$-x + y + z + u = 8$

$\mathcal{K} = \{[1, 2, 3, 4]\}$

b) $x - 2z + u = 3$

$2x - y + z = 5$

$x - y - 2z = 1$

$2y + z - u = -3$

- pouze na proměnné

$\mathcal{K} = \{[4, -1, 0, 1]\}$